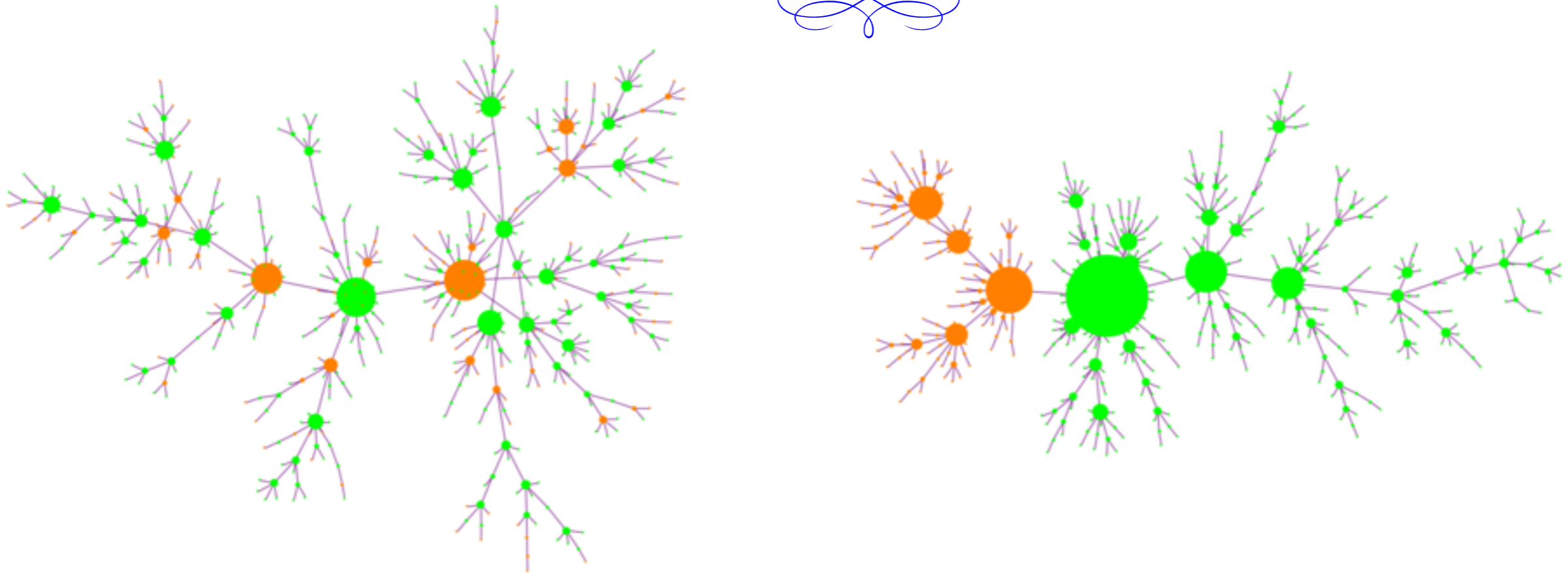


# *Homophilie et **plafond de verre** dans les **réseaux sociaux***

*d'après Avin, Keller, Lotker, Mathieu, Peleg et Pignolet*



Igor Kortchemski  
CNRS & École polytechnique



## Homophily and the Glass Ceiling Effect in Social Networks

Chen Avin <sup>\*†</sup>  
Ben Gurion University of the  
Negev, Israel  
avin@cse.bgu.ac.il

Claire Mathieu  
CNRS, École Normale  
Supérieure, France  
clairemathieu@gmail.com

Barbara Keller <sup>†</sup>  
ETH Zurich, Switzerland  
barbara.keller@tik.ee.ethz.ch

David Peleg <sup>\*</sup>  
Weizmann Institute, Israel  
david.peleg@weizmann.ac.il

Zvi Lotker <sup>\*</sup>  
Ben Gurion University of the  
Negev, Israel  
zvilo@cse.bgu.ac.il

Yvonne-Anne Pignolet  
ABB Corporate, Switzerland  
yvonne-  
anne.pignolet@ch.abb.com

*ITCS '15 – Proceedings of the 2015 Conference on Innovations in Theoretical Computer Science*

# *Le plafond de verre*

The “glass ceiling”... is the unseen, yet unbreakable barrier that keeps minorities and women from rising to the upper rungs of the corporate ladder, regardless of their qualifications or achievements.

Federal Glass Ceiling Commission. Solid Investments : Making Full Use of the Nation’s Human Capital. Washington, D.C. : U.S. Department of Labor, November 1995.

# *La voûte de cristal (Gabriel, George Sand, 1867)*

**GABRIEL.**

Au contraire, je suis triste ! Tenez, j'ai fait un rêve bizarre qui m'a préoccupé et comme poursuivi tout le jour.

**LE PRÉCEPTEUR.**

Quel enfantillage ! et ce rêve...

# *La vouîte de cristal (Gabriel, George Sand, 1867)*

**GABRIEL.**

J'ai rêvé que j'étais femme.

**LE PRÉCEPTEUR.**

En vérité, cela est étrange... Et d'où vous est venue cette imagination ?

**GABRIEL.**

D'où viennent les rêves ? Ce serait à vous de me l'expliquer, mon cher professeur.

**LE PRÉCEPTEUR.**

Et ce rêve vous était sans doute désagréable ?

# *La vouîte de cristal (Gabriel, George Sand, 1867)*

## **GABRIEL.**

Pas le moins du monde ; car, dans mon rêve, je n'étais pas un habitant de cette terre. J'avais des ailes, et je m'élevais à travers les mondes, vers je ne sais quel monde idéal. Des voix sublimes chantaient autour de moi ; je ne voyais personne ; mais des nuages légers et brillants, qui passaient dans l'éther, reflétaient ma figure, et j'étais une jeune fille vêtue d'une longue robe flottante et couronnée de fleurs.

# *La voûte de cristal (Gabriel, George Sand, 1867)*

## **LE PRÉCEPTEUR.**

Alors vous étiez un ange, et non pas une femme.

# *La voûte de cristal (Gabriel, George Sand, 1867)*

## **GABRIEL.**

J'étais une femme ; car tout à coup mes ailes se sont engourdies, l'éther s'est fermé sur ma tête, comme une voûte de cristal impénétrable, et je suis tombé, tombé... et j'avais au cou une lourde chaîne dont le poids m'entraînait vers l'abîme ; et alors je me suis éveillé, accablé de tristesse, de lassitude et d'effroi... Tenez, n'en parlons plus. Qu'avez-vous à m'enseigner aujourd'hui ?




# Motivation

Le principal objectif de *Homophily and the Glass Ceiling Effect in Social Networks* est de proposer un modèle mathématique permettant d'expliquer en partie le phénomène plafond de verre.

# Motivation

Le principal objectif de *Homophily and the Glass Ceiling Effect in Social Networks* est de proposer un modèle mathématique permettant d'expliquer en partie le phénomène plafond de verre.

Trois caractéristiques :

 minorité

# Motivation

Le principal objectif de *Homophily and the Glass Ceiling Effect in Social Networks* est de proposer un modèle mathématique permettant d'expliquer en partie le phénomène plafond de verre.

Trois caractéristiques :

↘ minorité

↘ homophilie

# Motivation

Le principal objectif de *Homophily and the Glass Ceiling Effect in Social Networks* est de proposer un modèle mathématique permettant d'expliquer en partie le phénomène plafond de verre.

Trois caractéristiques :

↘ minorité

↘ homophilie

↘ attachement préférentiel

# Plan

## I. LOIS EN PUISSANCE DANS LES RÉSEAUX

# Plan

## I. LOIS EN PUISSANCE DANS LES RÉSEAUX

## II. ATTACHEMENT PRÉFÉRENTIEL

# Plan

**I. LOIS EN PUISSANCE DANS LES RÉSEAUX**

**II. ATTACHEMENT PRÉFÉRENTIEL**

**III. LE NOUVEAU MODÈLE**

# Plan

**I. LOIS EN PUISSANCE DANS LES RÉSEAUX**

**II. ATTACHEMENT PRÉFÉRENTIEL**

**III. LE NOUVEAU MODÈLE**

**IV. CONCLUSION**



# Modélisation de réseaux d'objets en interaction

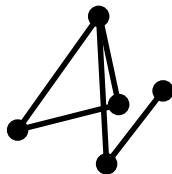


Figure – Un graphe  $G$ .

# Modélisation de réseaux d'objets en interaction

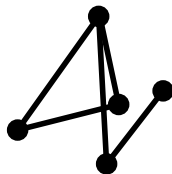


Figure – Un graphe  $G$ .

Quantité d'intérêt :  $P_k(G)$ , la proportion de sommets de degré  $k$  dans un graphe  $G$ .

# Modélisation de réseaux d'objets en interaction

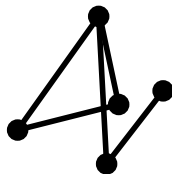


Figure – Un graphe  $G$ .

Quantité d'intérêt :  $P_k(G)$ , la proportion de sommets de degré  $k$  dans un graphe  $G$ .

Dans notre exemple,  $P_1(G) = 1/5$ ,  $P_2(G) = 3/5$ ,  $P_3(G) = 1/5$ .

## *Lois en puissance*

Dans de nombreux graphes  $G$  « réels », il se trouve que

$$P_k(G) \underset{k \text{ grand}}{\approx} k^{-\beta},$$

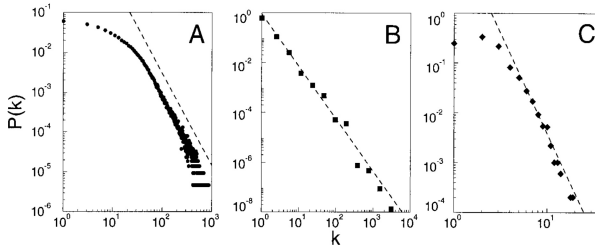
où  $P_k(G)$  est la proportion de sommets de degré  $k$  dans  $G$ .

# Lois en puissance

Dans de nombreux graphes  $G$  « réels », il se trouve que

$$P_k(G) \underset{k \text{ grand}}{\approx} k^{-\beta},$$

où  $P_k(G)$  est la proportion de sommets de degré  $k$  dans  $G$ .



**Fig. 1.** The distribution function of connectivities for various large networks. **(A)** Actor collaboration graph with  $N = 212,250$  vertices and average connectivity  $\langle k \rangle = 28.78$ . **(B)** WWW,  $N = 325,729$ ,  $\langle k \rangle = 5.46$  (6). **(C)** Power grid data,  $N = 4941$ ,  $\langle k \rangle = 2.67$ . The dashed lines have slopes **(A)**  $\gamma_{\text{actor}} = 2.3$ , **(B)**  $\gamma_{\text{www}} = 2.1$  and **(C)**  $\gamma_{\text{power}} = 4$ .

Figure – Extrait de *Emergence of Scaling in Random Networks*, Barabási & Albert, Science, 1999.

# Lois en puissance : cas à deux types

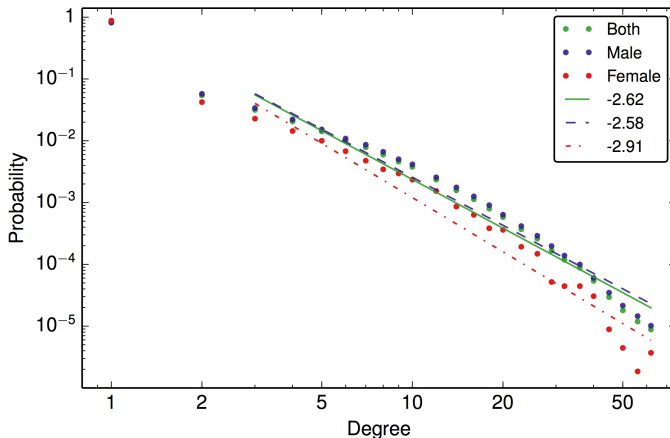


Figure – Issu de *Homophily and the Glass Ceiling Effect in Social networks* : graphe des relations directeur/directrice-étudiant/étudiante de la base de données DBLP (données sur 30 ans, 434232 personnes, 389296 arêtes).

# Plafond de verre

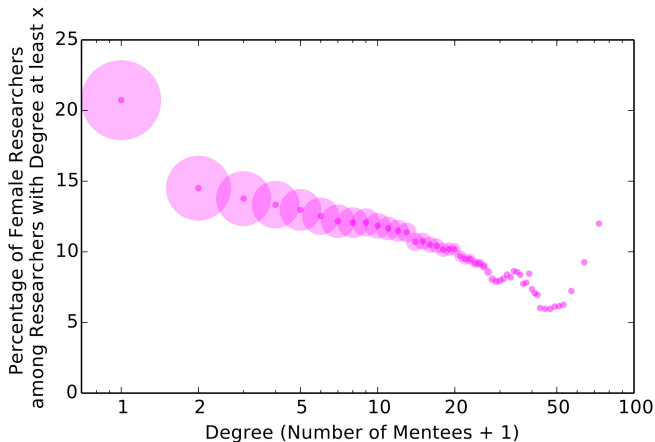
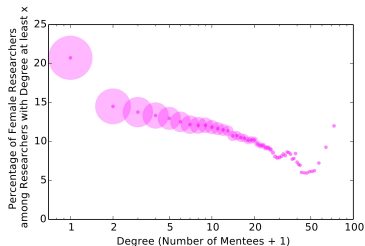


Figure – Issu de *Homophily and the Glass Ceiling Effect in Social networks* : graphe des relations directeur/directrice-étudiant/étudiante de la base de données DBLP (données sur 30 ans, 434232 personnes, 389296 arêtes).

# Plafond de verre



## Définition (AKLMPP).

On dit qu'une suite de graphes  $(G_n)$ , où les sommets sont de type 0 ou 1, satisfait au *plafond de verre* s'il existe une suite  $k_n \rightarrow \infty$  telle que

$$\frac{N_{\geq k_n}^0(G_n)}{N_{\geq k_n}^1(G_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad N_{\geq k_n}^1(G_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

où  $N_{\geq k_n}^i(G_n)$  est le nombre de sommets de type  $i$  de degré au moins  $k_n$  dans  $G_n$ .



## I. LOIS EN PUISSANCE DANS LES RÉSEAUX

## II. ATTACHEMENT PRÉFÉRENTIEL

## III. LE NOUVEAU MODÈLE

## IV. CONCLUSION

# *Modèle : arbres construits par attachement préférentiel*

(Barabási–Albert '99, Yule '25, Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01)

# *Modèle : arbres construits par attachement préférentiel*

(Barabási–Albert '99, Yule '25, Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01)

On construit  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence :

# *Modèle : arbres construits par attachement préférentiel*

(Barabási–Albert '99, Yule '25, Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01)

On construit  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence :

- $T_0$  est constitué d'un unique sommet.

# *Modèle : arbres construits par attachement préférentiel*

(Barabási–Albert '99, Yule '25, Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01)

On construit  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence :

- $T_0$  est constitué d'un unique sommet.
- Étant donné  $T_n$ , on construit  $T_{n+1}$  en ajoutant un nouveau sommet

# Modèle : arbres construits par attachement préférentiel

(Barabási–Albert '99, Yule '25, Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01)

On construit  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence :

- $T_0$  est constitué d'un unique sommet.
- Étant donné  $T_n$ , on construit  $T_{n+1}$  en ajoutant un nouveau sommet et en le reliant à un sommet existant

# Modèle : arbres construits par attachement préférentiel

(Barabási–Albert '99, Yule '25, Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01)

On construit  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence :

- $T_0$  est constitué d'un unique sommet.
- Étant donné  $T_n$ , on construit  $T_{n+1}$  en ajoutant un nouveau sommet et en le reliant à un sommet existant, choisi au hasard

# Modèle : arbres construits par attachement préférentiel

(Barabási–Albert '99, Yule '25, Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01)

On construit  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence :

- $T_0$  est constitué d'un unique sommet.
- Étant donné  $T_n$ , on construit  $T_{n+1}$  en ajoutant un nouveau sommet et en le reliant à un sommet existant, choisi au hasard, proportionnellement à son degré.



# Modèle : arbres construits par attachement préférentiel

(Barabási–Albert '99, Yule '25, Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01)

On construit  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence :

- $T_0$  est constitué d'un unique sommet.
- Étant donné  $T_n$ , on construit  $T_{n+1}$  en ajoutant un nouveau sommet et en le reliant à un sommet existant, choisi au hasard, proportionnellement à son degré.

*Remarque :*

$\curvearrowright$  la somme des degrés de  $T_n$  vaut  $2n$ . La probabilité d'ajouter un nouveau sommet à un sommet existant de degré  $d$  vaut donc  $\frac{d}{2n}$ .

# *Simulation*

## *Proportion de sommets de degré fixé*

Pour  $k \geq 1$ , on note  $P_k(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$ .

**Théorème** (Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01).

# Proportion de sommets de degré fixé

Pour  $k \geq 1$ , on note  $P_k(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$ .

**Théorème** (Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01).

Pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}[P_k(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

## *Idée de preuve*

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

$$N_k(T_{n+1}) =$$

## *Idée de preuve*

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

Sachant  $T_n$ , notons  $u_n$  le nouveau sommet qui arrive.

$$N_k(T_{n+1}) =$$

## *Idée de preuve*

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

Sachant  $T_n$ , notons  $u_n$  le nouveau sommet qui arrive.

$$N_k(T_{n+1}) = \left\{ \right.$$

## *Idée de preuve*

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

Sachant  $T_n$ , notons  $u_n$  le nouveau sommet qui arrive.

$$N_k(T_{n+1}) = \begin{cases} & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k-1 \end{cases}$$



## *Idée de preuve*

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

Sachant  $T_n$ , notons  $u_n$  le nouveau sommet qui arrive.

$$N_k(T_{n+1}) = \begin{cases} N_{k-1}(T_n) + 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k-1 \end{cases}$$

## *Idée de preuve*

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

Sachant  $T_n$ , notons  $u_n$  le nouveau sommet qui arrive.

$$N_k(T_{n+1}) = \begin{cases} N_{k-1}(T_n) + 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k-1 \\ & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k \end{cases}$$

## *Idée de preuve*

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

Sachant  $T_n$ , notons  $u_n$  le nouveau sommet qui arrive.

$$N_k(T_{n+1}) = \begin{cases} N_{k-1}(T_n) + 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k-1 \\ N_k(T_n) - 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k \end{cases}$$

## *Idée de preuve*

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

Sachant  $T_n$ , notons  $u_n$  le nouveau sommet qui arrive.

$$N_k(T_{n+1}) = \begin{cases} N_{k-1}(T_n) + 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k-1 \\ N_k(T_n) - 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k \\ \text{augmente toujours de 1 si } k=1 \end{cases}$$

## *Idée de preuve*

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

Sachant  $T_n$ , notons  $u_n$  le nouveau sommet qui arrive.

$$N_k(T_{n+1}) = \begin{cases} N_{k-1}(T_n) + 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k-1 \\ N_k(T_n) - 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k \\ \text{augmente toujours de 1 si } k=1 \end{cases}$$

$\wedge \rightarrow$  Premier cas :  $N_{k-1}(T_n)$  possibilités, chacune a probabilité  $\frac{k-1}{2n}$

## *Idée de preuve*

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

Sachant  $T_n$ , notons  $u_n$  le nouveau sommet qui arrive.

$$N_k(T_{n+1}) = \begin{cases} N_{k-1}(T_n) + 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k-1 \\ N_k(T_n) - 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k \\ & \text{augmente toujours de 1 si } k=1 \end{cases}$$

↗ Premier cas :  $N_{k-1}(T_n)$  possibilités, chacune a probabilité  $\frac{k-1}{2n}$

↗ Deuxième cas :  $N_k(T_n)$  possibilités, chacune a probabilité  $\frac{k}{2n}$ .

## Idée de preuve

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

Sachant  $T_n$ , notons  $u_n$  le nouveau sommet qui arrive.

$$N_k(T_{n+1}) = \begin{cases} N_{k-1}(T_n) + 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k-1 \\ N_k(T_n) - 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k \\ & \text{augmente toujours de 1 si } k=1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$  Premier cas :  $N_{k-1}(T_n)$  possibilités, chacune a probabilité  $\frac{k-1}{2n}$

$\rightsquigarrow$  Deuxième cas :  $N_k(T_n)$  possibilités, chacune a probabilité  $\frac{k}{2n}$ .

Ainsi, en notant  $p_k(n) = \mathbb{E}[N_k(T_n)]$  :

$$p_k(n+1) - p_k(n) = -\frac{k}{2n}p_k(n) + \frac{k-1}{2n}p_{k-1}(n) + \mathbb{1}_{k=1}.$$

## Idée de preuve

On note  $N_k(T_n)$  le nombre de sommets de degré  $k$  dans  $T_n$  (de sorte que  $P_k(T_n) = N_k(T_n)/(n+1)$ ).

Sachant  $T_n$ , notons  $u_n$  le nouveau sommet qui arrive.

$$N_k(T_{n+1}) = \begin{cases} N_{k-1}(T_n) + 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k-1 \\ N_k(T_n) - 1 & \text{si } u_n \sim \text{sommet de degré } k \\ & \text{augmente toujours de 1 si } k=1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$  Premier cas :  $N_{k-1}(T_n)$  possibilités, chacune a probabilité  $\frac{k-1}{2n}$

$\rightsquigarrow$  Deuxième cas :  $N_k(T_n)$  possibilités, chacune a probabilité  $\frac{k}{2n}$ .

Ainsi, en notant  $p_k(n) = \mathbb{E}[N_k(T_n)]$  :

$$p_k(n+1) - p_k(n) = -\frac{k}{2n}p_k(n) + \frac{k-1}{2n}p_{k-1}(n) + \mathbb{1}_{k=1}.$$

On démontre la convergence de  $p_k(n)/(n+1)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  par récurrence sur  $k$ .



## Proportion de sommets de degré fixé

Pour  $k \geq 1$ , on note  $P_k(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$ .

**Théorème** (Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01).

Pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}[P_k(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

Remarques :

## Proportion de sommets de degré fixé

Pour  $k \geq 1$ , on note  $P_k(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$ .

**Théorème** (Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01).

Pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}[P_k(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

Remarques :

 On a

$$\frac{4}{k(k+1)(k+2)} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} k^{-\beta}$$

avec  $\beta = 3$ .

## Proportion de sommets de degré fixé

Pour  $k \geq 1$ , on note  $P_k(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$ .

**Théorème** (Bollobás, Riordan, Spencer, Tusnády '01).

Pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}[P_k(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

Remarques :

↗ On a

$$\frac{4}{k(k+1)(k+2)} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} k^{-\beta}$$

avec  $\beta = 3$ .

↗ il est possible de démontrer que la convergence a lieu presque sûrement.

## I. LOIS EN PUISSANCE DANS LES RÉSEAUX

## II. ATTACHEMENT PRÉFÉRENTIEL

## III. LE NOUVEAU MODÈLE

## IV. CONCLUSION

# *Attachement préférentiel biaisé*

On fixe  $0 \leq r \leq 1/2$  et  $0 \leq \rho \leq 1$ .

# *Attachement préférentiel biaisé*

On fixe  $0 \leq r \leq 1/2$  et  $0 \leq \rho \leq 1$ .

On construit une suite d'arbres  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence, où chaque sommet est de type 0 ou 1 :

# Attachement préférentiel biaisé

On fixe  $0 \leq r \leq 1/2$  et  $0 \leq \rho \leq 1$ .

On construit une suite d'arbres  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence, où chaque sommet est de type 0 ou 1 :

- $T_0$  est constitué de deux sommets reliés, un de type 0 l'autre de type 1.

# Attachement préférentiel biaisé

On fixe  $0 \leq r \leq 1/2$  et  $0 \leq \rho \leq 1$ .

On construit une suite d'arbres  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence, où chaque sommet est de type 0 ou 1 :

- $T_0$  est constitué de deux sommets reliés, un de type 0 l'autre de type 1.
- Étant donné  $T_n$ , on construit  $T_{n+1}$  comme suit :



# Attachement préférentiel biaisé

On fixe  $0 \leq r \leq 1/2$  et  $0 \leq \rho \leq 1$ .

On construit une suite d'arbres  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence, où chaque sommet est de type 0 ou 1 :

- $T_0$  est constitué de deux sommets reliés, un de type 0 l'autre de type 1.
- Étant donné  $T_n$ , on construit  $T_{n+1}$  comme suit :
  - (a) on ajoute un nouveau sommet, de type 0 avec probabilité  $r$  et de type 1 avec probabilité  $1 - r$  [minorité] ;

# Attachement préférentiel biaisé

On fixe  $0 \leq r \leq 1/2$  et  $0 \leq \rho \leq 1$ .

On construit une suite d'arbres  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence, où chaque sommet est de type 0 ou 1 :

- $T_0$  est constitué de deux sommets reliés, un de type 0 l'autre de type 1.
- Étant donné  $T_n$ , on construit  $T_{n+1}$  comme suit :
  - (a) on ajoute un nouveau sommet, de type 0 avec probabilité  $r$  et de type 1 avec probabilité  $1 - r$  [minorité] ;
  - (b) on choisit un sommet déjà existant proportionnellement à son degré [attachement préférentiel].

# Attachement préférentiel biaisé

On fixe  $0 \leq r \leq 1/2$  et  $0 \leq \rho \leq 1$ .

On construit une suite d'arbres  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence, où chaque sommet est de type 0 ou 1 :

- $T_0$  est constitué de deux sommets reliés, un de type 0 l'autre de type 1.
- Étant donné  $T_n$ , on construit  $T_{n+1}$  comme suit :
  - (a) on ajoute un nouveau sommet, de type 0 avec probabilité  $r$  et de type 1 avec probabilité  $1 - r$  [minorité] ;
  - (b) on choisit un sommet déjà existant proportionnellement à son degré [attachement préférentiel].
    - $\curvearrowright$  S'il est de même type que le nouveau sommet, on les relie.

# Attachement préférentiel biaisé

On fixe  $0 \leq r \leq 1/2$  et  $0 \leq \rho \leq 1$ .

On construit une suite d'arbres  $(T_n)_{n \geq 0}$  par récurrence, où chaque sommet est de type 0 ou 1 :

- $T_0$  est constitué de deux sommets reliés, un de type 0 l'autre de type 1.
- Étant donné  $T_n$ , on construit  $T_{n+1}$  comme suit :
  - (a) on ajoute un nouveau sommet, de type 0 avec probabilité  $r$  et de type 1 avec probabilité  $1 - r$  [minorité] ;
  - (b) on choisit un sommet déjà existant proportionnellement à son degré [attachement préférentiel].
    - $\curvearrowright$  S'il est de même type que le nouveau sommet, on les relie.
    - $\curvearrowright$  Si non, avec probabilité  $\rho$  on les relie, et avec probabilité  $1 - \rho$  on recommence l'étape (b) [homophilie].

# *Simulations*

$r = 0.3$  et  $\rho = 0.7$  :

# *Simulations*

$r = 0.3$  et  $\rho = 0$  :

# *Simulations*

$r = 0.3$  et  $\rho = 1$  :

# *Simulations*

$r = 0.5$  et  $\rho = 0.7$  :



**Théorème (AKLMPP).**

On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ .

**Théorème (AKLMPP).**

On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E} [P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E} [P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

### Théorème (AKLMPP).

On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E} [P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E} [P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

et

$$P_k^0 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_0 k^{-\beta_0}, \quad P_k^1 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_1 k^{-\beta_1}.$$

### Théorème (AKLMPP).

On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E} [P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E} [P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

et

$$P_k^0 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_0 k^{-\beta_0}, \quad P_k^1 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_1 k^{-\beta_1}.$$

– Si  $0 < r < 1/2$  et  $0 < \rho < 1$ , on a  $\beta_1 < 3 < \beta_0$ .

## Théorème (AKLMPP).

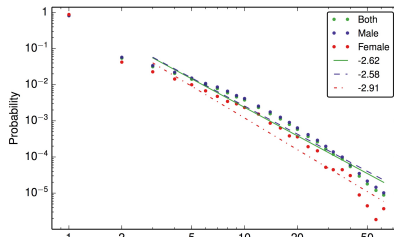
On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E} [P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E} [P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

et

$$P_k^0 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_0 k^{-\beta_0}, \quad P_k^1 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_1 k^{-\beta_1}.$$

– Si  $0 < r < 1/2$  et  $0 < \rho < 1$ , on a  $\beta_1 < 3 < \beta_0$ .



### Théorème (AKLMPP).

On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E} [P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E} [P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

et

$$P_k^0 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_0 k^{-\beta_0}, \quad P_k^1 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_1 k^{-\beta_1}.$$

– Si  $0 < r < 1/2$  et  $0 < \rho < 1$ , on a  $\beta_1 < 3 < \beta_0$ .

*Idée de preuve* : contrôler la somme des degrés des sommets de type 0.

### Théorème (AKLMPP).


On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E} [P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E} [P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

et

$$P_k^0 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_0 k^{-\beta_0}, \quad P_k^1 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_1 k^{-\beta_1}.$$

– Si  $0 < r < 1/2$  et  $0 < \rho < 1$ , on a  $\beta_1 < 3 < \beta_0$ .

 On a  $P_{\geq k}^0 / P_{\geq k}^1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

**Théorème (AKLMPP).**


On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E}[P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E}[P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

et

$$P_k^0 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_0 k^{-\beta_0}, \quad P_k^1 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_1 k^{-\beta_1}.$$

– Si  $0 < r < 1/2$  et  $0 < \rho < 1$ , on a  $\beta_1 < 3 < \beta_0$ .

 Peut-on trouver une suite  $k_n \rightarrow \infty$  telle que

$$\frac{N_{\geq k_n}^0(T_n)}{N_{\geq k_n}^1(T_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad N_{\geq k_n}^1(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

où  $N_{\geq k_n}^i(G_n)$  est le nombre de sommets de type  $i$  de degré au moins  $k_n$  dans  $G_n$  ?



**Théorème (AKLMPP).**

On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E}[P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E}[P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

et

$$P_k^0 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_0 k^{-\beta_0}, \quad P_k^1 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_1 k^{-\beta_1}.$$

– Si  $0 < r < 1/2$  et  $0 < \rho < 1$ , on a  $\beta_1 < 3 < \beta_0$ .

↗ Peut-on trouver une suite  $k_n \rightarrow \infty$  telle que

$$\frac{N_{\geq k_n}^0(T_n)}{N_{\geq k_n}^1(T_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad N_{\geq k_n}^1(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

où  $N_{\geq k_n}^i(G_n)$  est le nombre de sommets de type  $i$  de degré au moins  $k_n$  dans  $G_n$  ?

A priori **oui**.

### Théorème (AKLMPP).

On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E} [P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E} [P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

et

$$P_k^0 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_0 k^{-\beta_0}, \quad P_k^1 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_1 k^{-\beta_1}.$$

– Si  $0 < r < 1/2$  et  $0 < \rho < 1$ , on a  $\beta_1 < 3 < \beta_0$ .

### Théorème (AKLMPP).

On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E} [P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E} [P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

et

$$P_k^0 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_0 k^{-\beta_0}, \quad P_k^1 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_1 k^{-\beta_1}.$$

- Si  $0 < r < 1/2$  et  $0 < \rho < 1$ , on a  $\beta_1 < 3 < \beta_0$ .
- Si  $r = 1/2$ , on a  $\beta_0 = \beta_1 = 3$ .

### Théorème (AKLMPP).

On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E} [P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E} [P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

et

$$P_k^0 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_0 k^{-\beta_0}, \quad P_k^1 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_1 k^{-\beta_1}.$$

- Si  $0 < r < 1/2$  et  $0 < \rho < 1$ , on a  $\beta_1 < 3 < \beta_0$ .
- Si  $r = 1/2$ , on a  $\beta_0 = \beta_1 = 3$ .
- Si  $\rho = 0$  ou  $\rho = 1$ , on a  $\beta_0 = \beta_1 = 3$ .

### Théorème (AKLMPP).

On note  $P_k^i(T_n)$  la proportion de sommets de degré  $k$  de type  $i$ . Alors il existe  $(P_k^0)_{k \geq 1}$  et  $(P_k^1)_{k \geq 1}$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{E} [P_k^0(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^0, \quad \mathbb{E} [P_k^1(T_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_k^1,$$

et

$$P_k^0 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_0 k^{-\beta_0}, \quad P_k^1 \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_1 k^{-\beta_1}.$$

- Si  $0 < r < 1/2$  et  $0 < \rho < 1$ , on a  $\beta_1 < 3 < \beta_0$ .
- Si  $r = 1/2$ , on a  $\beta_0 = \beta_1 = 3$ .
- Si  $\rho = 0$  ou  $\rho = 1$ , on a  $\beta_0 = \beta_1 = 3$ .

Par ailleurs, si à la deuxième étape, le sommet déjà existant est choisi uniformément au hasard et non proportionnellement à son degré, il n'y a plus de plafond de verre.

**I. LOIS EN PUISSANCE DANS LES RÉSEAUX**

**II. ATTACHEMENT PRÉFÉRENTIEL**

**III. LE NOUVEAU MODÈLE**

**IV. CONCLUSION**

↪ Modèle mathématique avec trois caractéristiques : minorité, attachement préférentiel, homophilie.

↪ Modèle mathématique avec trois caractéristiques : minorité, attachement préférentiel, homophilie. Ces trois caractéristiques donnent lieu à un plafond de verre.



↪ Modèle mathématique avec trois caractéristiques : minorité, attachement préférentiel, homophilie. Ces trois caractéristiques donnent lieu à un plafond de verre.

En enlevant l'une d'elles, il n'y a plus de plafond de verre.

↪ Modèle mathématique avec trois caractéristiques : minorité, attachement préférentiel, homophilie. Ces trois caractéristiques donnent lieu à un plafond de verre.

En enlevant l'une d'elles, il n'y a plus de plafond de verre.

↪ Modèle *a priori* adapté pour des contextes où les interactions deux à deux sont prépondérantes.

↪ Modèle mathématique avec trois caractéristiques : minorité, attachement préférentiel, homophilie. Ces trois caractéristiques donnent lieu à un plafond de verre.

En enlevant l'une d'elles, il n'y a plus de plafond de verre.

↪ Modèle *a priori* adapté pour des contextes où les interactions deux à deux sont prépondérantes.

↪ Comment définir le succès ? Ici, le degré.

↪ Modèle mathématique avec trois caractéristiques : minorité, attachement préférentiel, homophilie. Ces trois caractéristiques donnent lieu à un plafond de verre.

En enlevant l'une d'elles, il n'y a plus de plafond de verre.

↪ Modèle *a priori* adapté pour des contextes où les interactions deux à deux sont prépondérantes.

↪ Comment définir le succès ? Ici, le degré. Qu'est-ce que cela signifie de briser le plafond de verre dans un milieu très masculin ?

V. Bousard, «Celles qui survivent : dispositions improbables des dirigeantes dans la finance», Travail, genre et sociétés, 2016, 47-65

V. Bousard, «Celles qui survivent : dispositions improbables des dirigeantes dans la finance», Travail, genre et sociétés, 2016, 47-65

*L'articulation entre normes et ethos professionnel participe à créer dans ce métier une fermeture des positions dirigeantes pour les femmes.*

V. Boussard, «Celles qui survivent : dispositions improbables des dirigeantes dans la finance», Travail, genre et sociétés, 2016, 47-65

*L'articulation entre normes et ethos professionnel participe à créer dans ce métier une fermeture des positions dirigeantes pour les femmes. C'est grâce à une combinaison improbable de dispositions que certaines parviennent à forcer cette clôture informelle.*

V. Bousard, « Celles qui survivent : dispositions improbables des dirigeantes dans la finance », Travail, genre et sociétés, 2016, 47-65

*L'articulation entre normes et ethos professionnel participe à créer dans ce métier une fermeture des positions dirigeantes pour les femmes. C'est grâce à une combinaison improbable de dispositions que certaines parviennent à forcer cette clôture informelle. Mais, ce faisant, ces cas hors-norme participent à durcir le « régime de genre » : l'accès des femmes au pouvoir et au profit ne se fait pas en subvertissant l'ordre du genre, mais en l'acceptant.*



V. Bousard, « Celles qui survivent : dispositions improbables des dirigeantes dans la finance », Travail, genre et sociétés, 2016, 47-65

*L'articulation entre normes et ethos professionnel participe à créer dans ce métier une fermeture des positions dirigeantes pour les femmes. C'est grâce à une combinaison improbable de dispositions que certaines parviennent à forcer cette clôture informelle. Mais, ce faisant, ces cas hors-norme participent à durcir le « régime de genre » : l'accès des femmes au pouvoir et au profit ne se fait pas en subvertissant l'ordre du genre, mais en l'acceptant. Les normes professionnelles ne sont jamais remises en question et leur construction genrée, jamais regardée.*

V. Bousard, «Celles qui survivent : dispositions improbables des dirigeantes dans la finance», Travail, genre et sociétés, 2016, 47-65

*L'articulation entre normes et ethos professionnel participe à créer dans ce métier une fermeture des positions dirigeantes pour les femmes. C'est grâce à une combinaison improbable de dispositions que certaines parviennent à forcer cette clôture informelle. Mais, ce faisant, ces cas hors-norme participent à durcir le « régime de genre » : l'accès des femmes au pouvoir et au profit ne se fait pas en subvertissant l'ordre du genre, mais en l'acceptant. Les normes professionnelles ne sont jamais remises en question et leur construction genrée, jamais regardée. Ces femmes ont réussi, en collant aux normes exigées, et en mobilisant des dispositions personnelles afin de se conformer à l'ethos professionnel.*

V. Bousard, «Celles qui survivent : dispositions improbables des dirigeantes dans la finance», Travail, genre et sociétés, 2016, 47-65

*L'articulation entre normes et ethos professionnel participe à créer dans ce métier une fermeture des positions dirigeantes pour les femmes. C'est grâce à une combinaison improbable de dispositions que certaines parviennent à forcer cette clôture informelle. Mais, ce faisant, ces cas hors-norme participent à durcir le « régime de genre » : l'accès des femmes au pouvoir et au profit ne se fait pas en subvertissant l'ordre du genre, mais en l'acceptant. Les normes professionnelles ne sont jamais remises en question et leur construction genrée, jamais regardée. Ces femmes ont réussi, en collant aux normes exigées, et en mobilisant des dispositions personnelles afin de se conformer à l'ethos professionnel.*

Pour briser le plafond de verre, s'interroger sur nos normes de réussite ?